Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 20 marzo 2025

Esercizio 1 Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x^2-4}$ determinandone continuità, derivabilità, asintoti, punti di massimo e minimo locali e assoluti, monotonia, estremi superiore e inferiore.

Soluzione

La funzione è definita nei punti dove non si annulla il denominatore, quindi in $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. La funzione è continua e derivabile in ogni punto del suo dominio in quanto quoziente di funzioni derivabili. Vediamo i limiti nei punti di frontiera del dominio:

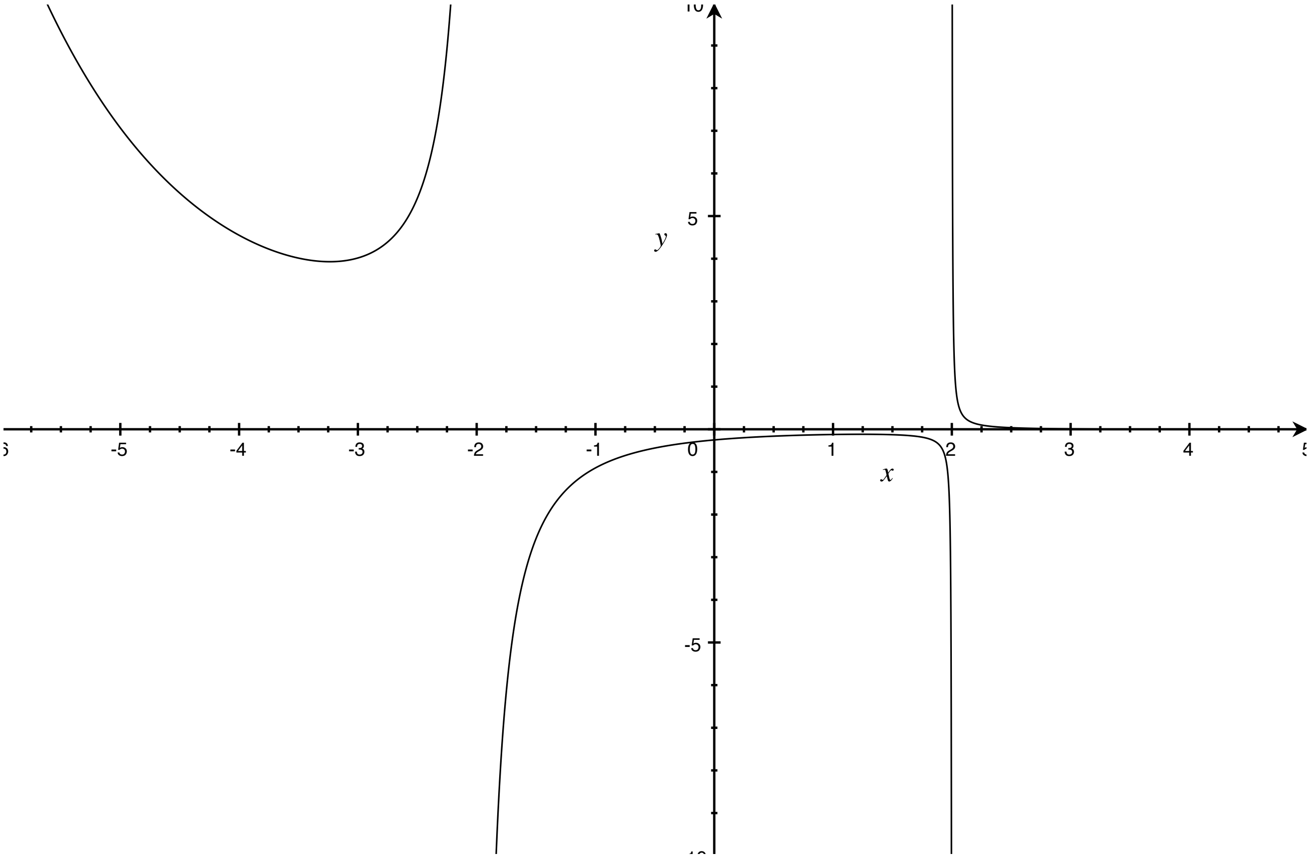
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-2^-} f(x) = \frac{e^2}{0^+} + \infty, \qquad \lim_{x\to-2^+} f(x) = \frac{e^2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \frac{e^{-2}}{0^-} = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{0}{+\infty} = 0^+$$

dove la forma di indeterminazione del primo limite può essere risolta utilizzando il teorema di de l'Hôpital, in quanto derivando due volte sia numeratore che denominatore si ottiene $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{2} = +\infty$. La funzione ha quindi due asintoti verticali di equazione rispettivamente $x = -2$ e $x = 2$ e un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ di equazione $y = 0$. Non ci sono asintoti obliqui, in quanto $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ (anche questo limite può essere ottenuto con il teorema di de l'Hôpital).
Calcoliamo ora la derivata di f per valutarne la monotonia.

$$f'(x) = \frac{e^{-x}(-x^2 - 2x + 4)}{(x^2-4)^2}.$$

Dato che la funzione esponenziale è sempre positiva, e il denominatore è un quadrato, il segno di f è determinato da quello di $-x^2 - 2x + 4$. Il trinomio si annulla per $x = -1 - \sqrt{5}$ e $x = \sqrt{5} - 1$, quindi $f'(x) < 0$ per i valori di x che appartengono al dominio di f e sono nell'intervallo $(-1 - \sqrt{5}, \sqrt{5} - 1)$, mentre è positiva al di fuori di tale intervallo. La f è decrescente in $(-\infty, -1 - \sqrt{5})$, in $(\sqrt{5} - 1, 2)$ e $(2, +\infty)$. La f è crescente in $(-1 - \sqrt{5}, -2)$ e in $(-2, \sqrt{5} - 1)$. Il punto $x = -1 - \sqrt{5}$ è quindi di minimo locale mentre $x = \sqrt{5} - 1$ è di massimo locale. L'estremo inferiore è $-\infty$ e quello superiore è $+\infty$, non ci sono quindi né massimo né minimo assoluti.



Esercizio 2 Dire se la funzione $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2-4}$ è integrabile sull'intervallo $(0,2)$.

Calcolare inoltre $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

Soluzione

Osserviamo che

$$\frac{x^3+1}{x^2-4} = \frac{x^3+1}{(x+2)(x-2)} \sim \frac{1}{x-2} \text{ per } x \to 2$$

quindi f non è integrabile (le due funzioni sono entrambe negative in un intorno sinistro di 2 e la seconda non è integrabile).
La funzione integranda è continua sull'intervallo chiuso e limitato $[0,1]$, quindi possiamo calcolarne l'integrale. Dividiamo il numeratore per il denominatore ottenendo che $x^3+1 = x(x^2-4)+4x+1$. Quindi:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx + \int_0^1 \frac{4x+1}{x^2-4}\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{2x}{x^2-4}\,dx + \int_0^1 \frac{dx}{x^2-4} =$$

$$= \frac{1}{2} + 2\left[\log|x^2-4|\right]_0^1 + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\,dx = \frac{1}{2} + 2(\log 3 - \log 4) + \frac{1}{4}\left[\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} + 2\log 3 - 2\log 4 + \frac{1}{4}\log\frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{7}{4}\log 3 - 2\log 4.$$

Esercizio 3 Sia $a_n = \sqrt{n}\displaystyle\int_0^{1/n^2} \cos x + \sin(2x)\,dx \;\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

Determinare il carattere della serie $\sum_n a_n$.

Soluzione

Osserviamo che

$$|a_n| = \sqrt{n} \left| \int_0^{1/n^2} \cos x + \sin(2x)\, dx \right| \leq \sqrt{n} \int_0^{1/n^2} |\cos x + \sin(2x)|\, dx \leq$$

$$\leq \sqrt{n} \int_0^{1/n^2} |\cos x| + |\sin(2x)|\, dx \leq \sqrt{n}\, \frac{2}{n^2}$$

quindi

$$\sum_n |a_n| \leq 2 \sum_n \frac{1}{n^{3/2}}$$

e l'ultima è una serie armonica di esponente maggiore di 1, quindi converge. La serie data pertanto converge assolutamente.